BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG
NĂM HỌC 2021 - 2022

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: **TOÁN**
Thời gian: **180** phút *(không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi: **04/3/2022**
Đề thi gồm 01 trang, 04 bài

Bài 1 (5,0 *điểm*)
Cho a là một số thực không âm và dãy số (u_n) được xác định bởi

$$u_1 = 6,\ u_{n+1} = \frac{2n+a}{n} + \sqrt{\frac{n+a}{n}u_n + 4},\ \forall n \ge 1.$$

a) Với $a = 0$, chứng minh rằng (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

b) Với mọi $a \ge 0$, chứng minh rằng (u_n) có giới hạn hữu hạn.

Bài 2 (5,0 *điểm*)
Tìm tất cả các hàm số $f:(0;+\infty) \to (0;+\infty)$ thoả mãn

$$f\left(\frac{f(x)}{x} + y\right) = 1 + f(y),\ \forall x, y \in (0;+\infty).$$

Bài 3 (5,0 *điểm*)
Cho tam giác nhọn ABC. Các điểm E, F lần lượt thay đổi trên tia đối của các tia BA, CA sao cho $BF = CE$ $(E \ne B,\ F \ne C)$. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của BE, CF và D là giao điểm của BF với CE.

a) Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác DBE, DCF. Chứng minh rằng MN song song với IJ.

b) Gọi K là trung điểm của MN và H là trực tâm của tam giác AEF. Chứng minh rằng HK luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 4 (5,0 *điểm*)
Với mỗi cặp số nguyên dương (n, m) thoả mãn $n < m$, gọi $s(n, m)$ là số các số nguyên dương thuộc đoạn $[n; m]$ và nguyên tố cùng nhau với m. Tìm tất cả các số nguyên dương $m \ge 2$ thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i) $\dfrac{s(n,m)}{m-n} \ge \dfrac{s(1,m)}{m}$ với mọi $n = 1, 2, \ldots, m-1$;

ii) $2022^m + 1$ chia hết cho m^2.

-------------------- HẾT --------------------

- *Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
- *Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.*

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG
NĂM HỌC 2021 - 2022

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: **TOÁN**
Thời gian: **180** phút *(không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi: **05/3/2022**
Đề thi gồm 01 trang, 03 bài

Bài 5 (6,0 *điểm*)

Cho $P(x)$ và $Q(x)$ là hai đa thức khác hằng, có hệ số là các số nguyên không âm, trong đó các hệ số của $P(x)$ đều không vượt quá 2021 và $Q(x)$ có ít nhất một hệ số lớn hơn 2021. Giả sử $P(2022)=Q(2022)$ và $P(x)$, $Q(x)$ có chung nghiệm hữu tỷ $\frac{p}{q}\neq 0$ ($p,q\in\mathbb{Z}$; p và q nguyên tố cùng nhau). Chứng minh rằng $|p|+n|q|\leq Q(n)-P(n)$ với mọi $n=1,2,\ldots,2021$.

Bài 6 (7,0 *điểm*)

Gieo 4 con súc sắc cân đối, đồng chất. Ký hiệu x_i $(1\leq x_i\leq 6)$ là số chấm trên mặt xuất hiện của con súc sắc thứ i $(i=1,2,3,4)$.

a) Tính số các bộ (x_1,x_2,x_3,x_4) có thể có.

b) Tính xác suất để có một số trong x_1,x_2,x_3,x_4 bằng tổng của ba số còn lại.

c) Tính xác suất để có thể chia x_1,x_2,x_3,x_4 thành hai nhóm có tổng bằng nhau.

Bài 7 (7,0 *điểm*)

Cho tam giác ABC có B, C cố định trên đường tròn (O) (BC không đi qua tâm O) và điểm A thay đổi trên cung lớn $\overset{\frown}{BC}$ sao cho $AB\neq AC$. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với BC tại D. Gọi I_a là tâm đường tròn bàng tiếp góc $\widehat{BAC}$, L là giao điểm của I_aD với OI và E là điểm trên (I) sao cho DE song song với AI.

a) Đường thẳng LE cắt đường thẳng AI tại F. Chứng minh rằng $AF=AI$.

b) Trên đường tròn (J) ngoại tiếp tam giác I_aBC lấy điểm M sao cho I_aM song song với AD, MD cắt lại (J) tại N. Chứng minh rằng trung điểm T của MN luôn thuộc một đường tròn cố định.

-------------------- HẾT --------------------

- *Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
- *Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.*

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG
NĂM HỌC 2021 - 2022

HƯỚNG DẪN CHẤM THI
Đề thi chính thức

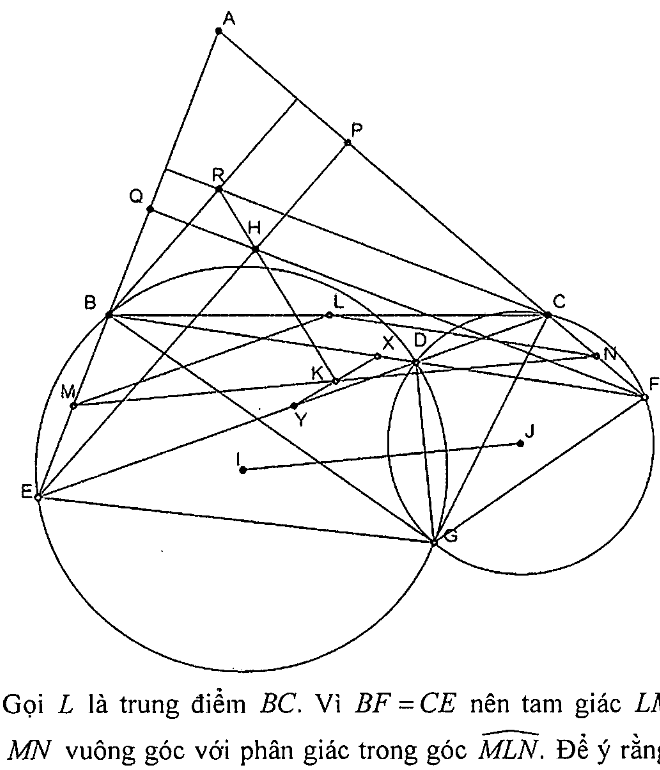
Môn: **TOÁN**
Thời gian: **180** phút *(không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi: **04/3/2022** và **05/3/2022**
Hướng dẫn chấm thi gồm 06 trang

I. HƯỚNG DẪN CHUNG

1. Giám khảo chấm đúng như đáp án, biểu điểm của Bộ Giáo dục và Đào tạo.
2. Nếu thí sinh có cách trả lời khác đáp án nhưng đúng thì giám khảo vẫn chấm điểm theo biểu điểm của Hướng dẫn chấm thi.
3. Giám khảo không quy tròn điểm thành phần của từng câu, điểm của bài thi.

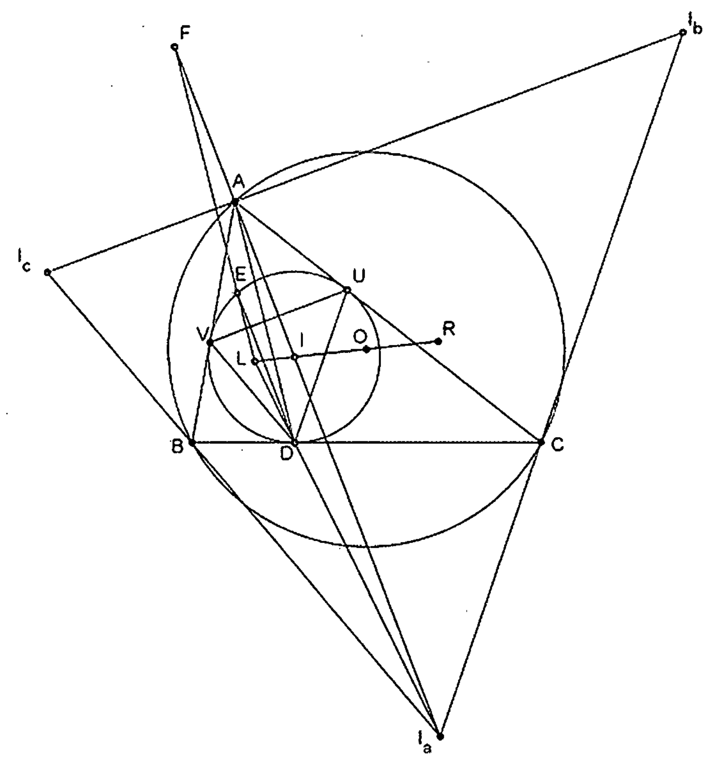
II. ĐÁP ÁN, BIỂU ĐIỂM

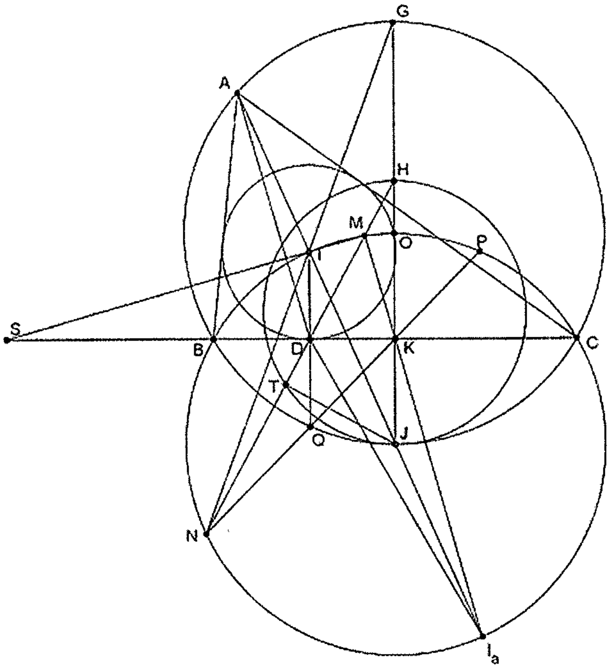
Bài	Ý	Đáp án	Thang điểm
1	a	Với $a=0$, ta có $u_1=6,\ u_{n+1}=2+\sqrt{u_n+4},\quad n\ge 1.\qquad (1)$ Kiểm tra bằng phương pháp quy nạp rằng $6=u_1\ge u_n\ge u_{n+1}\ge 4,\quad \forall n\ge 1.$ Do đó (u_n) có giới hạn hữu hạn và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=l\in[4,\,6]$. Hơn nữa, từ (1) ta suy ra $l=2+\sqrt{l+4}\Rightarrow l=5.$	2,00
	b	Đặt $k_0:=[a]+1\in\mathbb{N}^*$ và $M:=\max\left\{u_1,\dots,u_{k_0},8\right\}\ge 8.$ Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp rằng $4\le u_n\le M\qquad (2)$ với mọi $n\ge 1$. Thật vậy, rõ ràng $4\le u_n$ với mọi $n\ge 1$ và $u_n\le M$ với mọi $1\le n\le k_0$. Giả sử (2) đúng tới $n=k\ge k_0$. Khi đó, vì $0\le a<[a]+1=k_0\le k$ và $M\ge 8$ nên $u_{k+1}=\dfrac{2k+a}{k}+\sqrt{\dfrac{k+a}{k}u_k+4}\le 3+\sqrt{2M+4}\le 3+\sqrt{2M+9}\le M.$ Vậy (2) đúng với mọi $n\ge 1$. Tiếp theo ta xét hai trường hợp sau: Trường hợp 1: tồn tại $n_0\ge 1$ sao cho $u_{n_0}\ge u_{n_0+1}$. Khi đó, vì $\left(\dfrac{2n+a}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ và $\left(\dfrac{n+a}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ là hai dãy số giảm nên bằng phương pháp quy nạp, ta suy ra $u_n\ge u_{n+1}$ với mọi $n\ge n_0$. Do đó, từ (2) ta suy ra (u_n) có giới hạn hữu hạn. Trường hợp 2: $u_n<u_{n+1}$ với mọi $n\ge 1$. Khi đó, từ (2) ta suy ra (u_n) có giới hạn hữu hạn.	3,00
		Tổng điểm Bài 1	**5,00**

2		Bằng quy nạp ta có $f\left(n\dfrac{f(x)}{x}+y\right)=n+f(y)$ với mọi $n\in\mathbb{Z}^+$ và $x,y>0$. Giả sử tồn tại $z,t>0$ để $\dfrac{f(z)}{z}>\dfrac{f(t)}{t}$. Khi đó tồn tại n,N nguyên dương đủ lớn để $N>f(1)$ và $n\left(\dfrac{f(z)}{z}-\dfrac{f(t)}{t}\right)+1>Nf(1)\Rightarrow n\dfrac{f(z)}{z}+1=n\dfrac{f(t)}{t}+Nf(1)+y$ với $y>0$. Do đó $n+f(1)=f\left(n\dfrac{f(z)}{z}+1\right)=f\left(n\dfrac{f(t)}{t}+Nf(1)+y\right)=n+N+f(y)>n+f(1),$ vô lý. Vậy $\dfrac{f(z)}{z}=\dfrac{f(t)}{t}$, $\forall z,t>0$. Suy ra $f(x)=kx$, $\forall x>0$ (k là hằng số dương). Thử lại ta có $k=1$, hay $f(x)=x$ với mọi $x>0$.	5,00
		Tổng điểm bài 2	**5,00**
3	a	Xét thế hình sau đây  Gọi L là trung điểm BC. Vì $BF=CE$ nên tam giác LMN cân tại L, do đó MN vuông góc với phân giác trong góc $\widehat{MLN}$. Để ý rằng phân giác trong các góc $\widehat{MLN}$ và $\widehat{EDF}$ song song với nhau (do các tia tạo góc tương ứng song song), suy ra MN vuông góc với phân giác trong góc $\widehat{EDF}$. Gọi G là giao điểm thứ hai của $(DBE),(DCF)$. Ta có $\Delta GBF=\Delta GEC$ (g.c.g) $\Rightarrow GB=GE, GC=GF$ nên G là trung điểm các cung $\overparen{BDE},\overparen{CDF}$. Suy ra DG là phân giác trong góc $\widehat{EDF}$. Để ý rằng DG vuông góc đường nối tâm IJ. Vậy ta có $MN \parallel IJ$.	**2,00**

	b	Ký hiệu X,Y lần lượt là trung điểm của BF,CE và $(X),(Y)$ tương ứng là các đường tròn đường kính BF,CE. Cho EH,FH cắt AC,AB tương ứng tại P,Q. Từ hệ thức $\overline{HE}.\overline{HP}=\overline{HF}.\overline{HQ}\Rightarrow P_{H/(X)}=P_{H/(Y)}$ nên H thuộc trục đẳng phương d của (X) và (Y). Để ý rằng (X) và (Y) có bán kính bằng nhau nên d chính là trung trực của XY, do đó d đi qua trung điểm của XY. Mặt khác $MXNY$ là hình bình hành nên trung điểm của XY cũng là trung điểm K của MN, thành thử d chính là đường thẳng HK. Cuối cùng, gọi R là trực tâm ΔABC, lập luận tương tự như với điểm H, ta cũng có $P_{R/(X)}=P_{R/(Y)}$ nên $R\in d$. Vậy HK luôn đi qua điểm R cố định.	**3,00**
		Tổng điểm bài 3	**5,00**
4		Xét trường hợp m có nhiều hơn một ước nguyên tố $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}\ (p_1<p_2<\cdots<p_r;r>1)$ thì chọn $n=m-p_1p_2\cdots p_r+p_1<m$. Vì $(m-k,m)=(k,m)$ và $(k,m)=1\Leftrightarrow(k,p_1p_2\cdots p_r)=1$ nên ta có (với $\varphi(n)$ là hàm Euler) $\frac{s(n,m)}{m-n}=\frac{\varphi(p_1p_2\cdots p_r)-(p_1-1)}{p_1p_2\cdots p_r-p_1}=\frac{\prod(p_i-1)-(p_1-1)}{\prod p_i-p_1}$ $<\frac{\prod(p_i-1)}{\prod p_i}=\frac{\varphi(m)}{m}=\frac{s(1,m)}{m}.$ Như vậy điều kiện $i)$ không thoả mãn. Do đó m có một ước nguyên tố, $m=p^{\alpha}$. Khi đó $\frac{s(n,m)}{m-n}=\frac{m-n-\left[\frac{m-n}{p}\right]}{m-n}\ge\frac{m-n-\frac{m-n}{p}}{m-n}=1-\frac{1}{p}=\frac{\varphi(m)}{m}=\frac{s(1,m)}{m}.$ Vậy điều kiện $i)$ thoả mãn. Điều kiện $ii)$ suy ra $(p,2022)=1$. Ta dễ có $2022^2\equiv 2022^{(2m,p-1)}\equiv 1(\bmod p)\Rightarrow p\mid 2021.2023.$ Nếu $p\mid 2021\Rightarrow 2\,\vdots\, p$ (vô lý) Nếu $p\mid 2023$ thì áp dụng LTE ta có $v_p(2023)+v_p(m)\ge 2v_p(m)\Rightarrow m\in\{7,17,17^2\}$.	**5,00**
		Tổng điểm bài 4	**5,00**
5		Ta chứng minh $P(n)<Q(n)$ với mọi $n\in\{1,2,\dots,2021\}$. Đặt $Q(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$. Gọi $i\in\{0,1,\dots,m\}$ là chỉ số nhỏ nhất để $a_i\ge 2022$. Ta xét phép biến đổi sau để được đa thức $Q_1(x)$: Viết $a_i=2022h+r\left(h\ge1,0\le r<2022\right)$. Đặt $b_i=r,b_{i+1}=a_{i+1}+h$ và $b_k=a_k,\forall k\in\{1,2,\dots,m+1\}\setminus\{i,i+1\}$ (ta quy ước $a_{m+1}=0$). Đặt $Q_1(x):=b_{m+1}x^{m+1}+b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0$. Ta kiểm tra được $Q_1(2022)=Q(2022)$ và $Q_1(n)<Q(n),\forall n=1,2,\dots,2021$. Nếu $Q_1(x)$ có hệ số ≥ 2022, ta lại thực hiện phép biến đổi tương tự để được $Q_2(x)$, và cứ tiếp tục như thế. Do $\{Q_j(1)\}_{j\ge1}$ là dãy các số nguyên không âm,	**6,00**

		giảm thật sự nên sau hữu hạn phép biến đổi, ta phải có $Q_{j_0}(x)$ với các hệ số không âm và ≤ 2021. Ta có $Q_{j_0}(2022) = Q(2022) = P(2022)$. Viết $Q_{j_0}(2022)$ và $P(2022)$ theo hệ cơ số 2022, ta suy ra bộ hệ số của hai đa thức Q_{j_0} và P phải trùng nhau, hay $Q_{j_0}(x) \equiv P(x)$. Điều đó dẫn đến $P(n) = Q_{j_0}(n) < Q(n), \forall n = 1,2,\ldots,2021$. Mặt khác, dễ có $\frac{p}{q} < 0$ nên có thể giả sử $p > 0, q < 0 \Rightarrow \lvert p \rvert + n\lvert q \rvert = p - nq$. Để ý rằng $\frac{p}{q}$ là nghiệm hữu tỷ $\left((p,q)=1\right)$ của $P(x)$ thì $p \mid P(0)$. Xét $G(x) = P(x+n)$ thì $\frac{p-nq}{q}$ là nghiệm của $G(x) \Rightarrow p - nq \mid G(0) = P(n)$. Tương tự, $p - nq \mid Q(n)$. Suy ra $p - nq \mid Q(n) - P(n)$ nên $\lvert p \rvert + n\lvert q \rvert \leq Q(n) - P(n), \forall n = 1,2,\ldots,2021$.	
		Tổng điểm bài 5	**6,00**
6	**a**	Số bộ (x_1, x_2, x_3, x_4) có thể có là 6^4.	**1,00**
	b	Ký hiệu A_i là tập hợp các bộ (x_1, x_2, x_3, x_4) sao cho x_i bằng tổng các số còn lại. Ta cần tính xác suất biến cố $A = \cup A_i$. Ta thấy $\lvert A_i \rvert$ có số phần tử bằng nhau và là số nghiệm $\in \{1,2,....,6\}$ của phương trình: $x_1 = x_2 + x_3 + x_4$. Chuyển vế ta có $7 = x'_1 + x_2 + x_3 + x_4$, $x'_1 = 7 - x_1$. Số nghiệm nguyên dương của phương trình này theo công thức chia kẹo Euler là $C_6^3 = 20$. Dễ thấy $A_i \cap A_j = \varnothing$, cho nên $\lvert A \rvert = \sum \lvert A_i \rvert = 80$. Xác suất cần tính là $\frac{80}{1296}$.	**2,00**
	c	Ký hiệu $B_i, i = 2,3,4$ là tập hợp (x_1, x_2, x_3, x_4) sao cho $x_1 + x_i$ bằng tổng của hai số còn lại, chúng có số phần tử bằng nhau. Ta có $\lvert B_2 \rvert$ là số nghiệm thuộc $\{1,2,\ldots,6\}$ của phương trình : $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, cũng là phương trình $14 = x'_1 + x'_2 + x_3 + x_4, x'_1 = 7 - x_1, x'_2 = 7 - x_2$. Số nghiệm của nó theo công thức Euler là C_{13}^3. Dễ thấy phương trình trên có tối đa một ẩn nhận giá trị lớn hơn 6. Ta cần loại trừ nghiệm này. Chẳng hạn, khi $x'_1 \geq 7$ ta đưa về phương trình về $8 = x''_1 + x'_2 + x_3 + x_4, x''_1 = x'_1 - 6$. Số các nghiệm theo công thức Euler là $C_7^3 =$ 35. Vì có 4 trường hợp xảy ra với 4 biến, cho nên số nghiệm có ít nhất một ẩn nhận giá trị lớn hơn 6 là $4 \times 35 = 140$. Do đó $\lvert B_2 \rvert = 286 - 140 = 146$. Dễ thấy $B_i \cap B_j$ có 36 phần tử, vì khi đó $x_1 = x_k, x_i = x_j$. Tương tự $\lvert B_2 \cap B_3 \cap B_4 \rvert = 6$ (khi đó cả 4 số phải bằng nhau). Đặt $B = \cup B_i$ thì $\lvert B \rvert = \lvert \cup B_i \rvert = 3 \times 146 - 3 \times 36 + 6 = 336$.	**4,00**

		Dễ thấy $A \cap B = \varnothing$, nên $\lvert A \cup B \rvert = 80 + 336 = 416$. Xác suất cần tìm là $\frac{26}{81}$	
		Tổng điểm bài 6	**7,00**
7	**a**	Xét thế hình sau đây  Gọi I_b, I_c là tâm đường tròn bàng tiếp góc $\widehat{ABC}, \widehat{BCA}$ và U, V lần lượt là tiếp điểm của (I) với AC, AB. Các tam giác $I_aI_bI_c$ và DUV có các cạnh tương ứng song song nên chúng là ảnh của nhau qua một phép vị tự H. Gọi R là tâm đường tròn $(I_aI_bI_c)$. Do I là trực tâm và O là tâm đường tròn Euler của $\Delta I_aI_bI_c$ nên R, I, O cùng thuộc một đường thẳng đi qua tâm vị tự của H. Để ý rằng I_aD cũng đi qua tâm vị tự này nên L chính là tâm vị tự của H. Trong tam giác DUV, ta có E là giao của đường cao qua D với đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác này nên E là điểm đối xứng với trực tâm ΔDUV qua đường thẳng UV. Do I_aA là đường cao của $\Delta I_aI_bI_c$ nên giao điểm F của LE với I_aA là ảnh của E qua phép vị tự H. Suy ra F đối xứng với trực tâm I của $\Delta I_aI_bI_c$ qua I_bI_c, tức là F đối xứng với I qua A. Do đó $AF = AI$.	**3,00**
	b	Xét thế hình sau đây	**4,00**



Trước hết, ta chứng minh I_aM đi qua trung điểm K của BC. Thật vậy, do DA là đường đối trung của ΔDUV nên từ giả thiết $I_aM \parallel DA$, ta suy ra đường thẳng I_aM là đường đối trung của $\Delta I_aI_bI_c$. Trong $\Delta I_aI_bI_c$ thì B,C là chân các đường cao đi qua I_b, I_c nên đường đối trung I_aM là trung tuyến trong ΔI_aBC. Vậy I_aM đi qua trung điểm K của BC.

Gọi S là giao điểm của MI với BC. Tứ giác $IDKM$ có $\widehat{D} = \widehat{M} = 90^o$ nên nội tiếp. Do đó ta có $SD.SK = SI.SM = SB.SC$.

Theo tiêu chuẩn Maclaurin, ta được $(BCSD) = -1 \Rightarrow M(BCSD) = -1$.

Chiếu tâm M lên đường tròn (J), ta được $IBNC$ là tứ giác điều hoà. Gọi G là trung điểm của cung $\overset{\frown}{BAC}$, Q và P lần lượt là giao điểm của KN với ID và với (J). Vì J là trung điểm của cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A nên $\widehat{GBJ} = \widehat{GCJ} = 90^o$, thành thử G là giao điểm các tiếp tuyến của (J) tại B và C.

Suy ra NI đi qua G. Do NI và NP đẳng giác góc $\widehat{BNC}$ (đường đối trung và trung tuyến trong ΔBNC) nên I và P đối xứng nhau qua trung trực KG của BC. Suy ra các đường thẳng KI và KN đối xứng nhau qua BC, thành thử D chính là trung điểm IQ. Bây giờ để ý rằng $GK \parallel IQ$ nên ND cũng đi qua trung điểm H của GK là điểm cố định.

Từ đây ta có $\widehat{JTH} = 90^o$, suy ra T luôn thuộc đường tròn đường kính JH cố định.

Tổng điểm bài 7	**7,00**
Tổng điểm ngày 1+ ngày 2	**40,00**